УДК 539.3/4:534(0.31)

В.П. ЖАРОВ, В.И. ИГНАТЕНКО

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРУЕМОГО СОСТОЯНИЯ ПРУЖИННОГО ЗУБА КУЛЬТИВАТОРА НА МИКРОУРОВНЕ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Приводится вывод математической модели НДС криволинейного бруса переменного сечения и кривизны в полярных координатах, допускающего решение через степенные и логарифмические функции.

Ключевые слова: *математическая модель, криволинейный брус, напряженно-деформированное состояние.*

Введение. В современном культиваторостроении широко применяются пружинные зубья и стойки для крепления рабочих органов. Считается, что благодаря возникающим вибрациям они лучше рыхлят, меньше забиваются и могут обходить препятствия. В качестве типового на рис.1,а приведён пружинный зуб КПЦ с S-образной стойкой сечением 10х30 мм, разноориентированным по длине стойки.

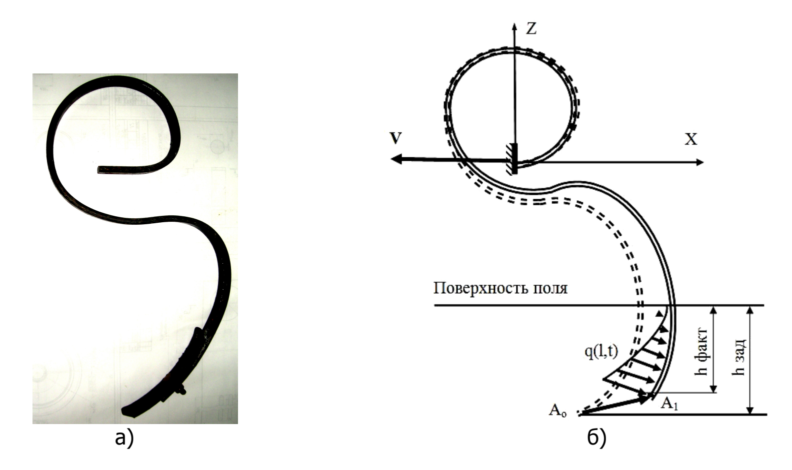


Рис.1. Пружинный зуб культиватора: а – общий вид; б – расчётная схема

Соотношение большего размера сечения к длине более 1/30. С точки зрения строительной механики такую пружинную стойку следует отнести к плоским кривым брусьям переменного сечения и кривизны. Расчётная схема пружинного зуба приведена на рис.1. Распределённая по подземной части нагрузка $q(l, t)$ приложена в плоскости стойки, имеет постоянную составляющую q_o, на которую накладывается переменная $q_v(t)$. Под действием нагрузки стойка получает упругие деформации $s(l,t)$, её конфигурация изменяется (пунктиром показано начальное положение, сплошным – под нагрузкой).

Направление смещений и технологические преимущества стойки определяет конфигурация стойки. Задавать конфигурацию как соотношение между координатами $z = z(x)$ нерационально, так как функция получа-

ется неоднозначной. Более рационально задавать конфигурацию в параметрической форме двумя зависимостями:

$$x = x(l); \qquad z = z(l), \qquad (1)$$

где l – длина текущего участка стойки, являющаяся здесь параметром.

Длину l участков стойки рациональней определять не по его воображаемой осевой линии, недоступной для измерений, а по передней грани. Именно она взаимодействует с почвенной средой, именно её форму регламентируют, а её кривизну указывают на чертежах.

Используя зависимость (1), можно определить переменный радиус кривизны по длине стойки R(l) по формулам аналитической геометрии:

$$R(l)=\frac{(1-dz/dx)^{\frac{3}{2}}}{d^2z/dx^2}, \qquad (2)$$

где производные функции z (x) задаются через производные по параметру l:

$$dz/dx=z'(l)/x'(l); \quad d^2z/dx^2=\frac{x'(l)z''(l)-z'(l)x''(l)}{[x'(l)]^3}. \qquad (3)$$

Формулировка проблемы. Пружинные зубья просты по конструкции и эффективны в работе. Но они имеют и недостатки, проистекающие из их достоинств: работая вблизи порога прочности, они имеют постоянные проблемы с прочностью и долговечностью. Напряжённо-деформированное состояние (НДС) пружинных стоек обычно рассчитывают по формулам сопромата [1, 3], рассматривая равновесие отсечённой части с применением гипотезы плоских сечений. При такой структуризации получается лишь приближённая модель на макроуровне, не способная описывать поля напряжений в упругой стойке как сплошной среде.

Постановка задачи. Пружинный зуб, взаимодействующий с почвенной средой, является объектом с распределенными параметрами по длине стойки, находящейся под действием распределенной нагрузки. Стоит задача создания математического описания НДС пружинного зуба на микроуровне как краевую задачу с использованием уравнений теории упругости в частных производных.

Разработка модели НДС пружинного зуба. Объект моделирования представляет упругое тело в виде криволинейного бруса и к нему справедливы базовые соотношения теории упругости. В ней используются уравнения НДС упругого тела в декартовой системе координат, в которой малый элемент представляется соответственно в виде прямоугольного параллелепипеда [1], [2]. Однако их применение к криволинейной стойке имеет проблемы, связанные с невозможностью представления криволинейных тел элементами типа прямоугольного параллепипеда.

Лучшие результаты для криволинейного тела даёт применение дугообразного элемента abcd, центр кривизны которого совмещён с центром кривизны O рассматриваемого текущего сечения стойки (рис.2) с радиусом кривизны R и углом наклона θ. Элемент ограничен двумя сечениями, проходящими через центр кривизны и составляющими угол dθ. Радиус ближней грани элемента r, высота элемента dr, длина dℓ элемента dℓ = r dθ.

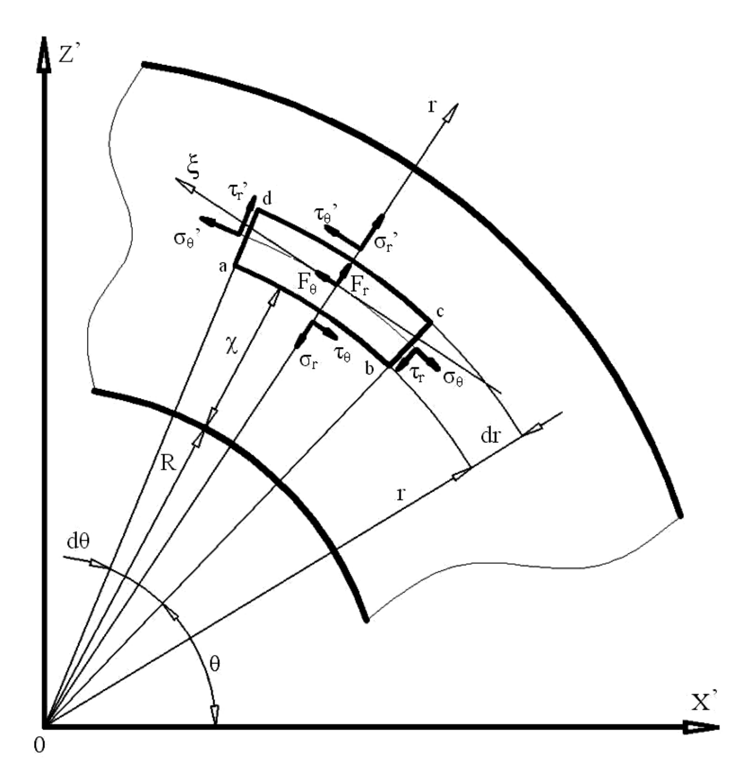


Рис.2. Расчётная схема НДС пружинного зуба

Рассмотрим равновесие элемента. На гранях элемента действуют нормальные напряжения σ_θ σ_θ’ σ_r σ_r’ и тангенциальные τ_θ τ_θ' τ_r τ_r' . Напряжения на противоположных гранях связаны через приращения $\Delta\sigma_r$, $\Delta\sigma_\theta$, $\Delta\tau_r$ и $\Delta\tau_\theta$:

$$\sigma_r' = \sigma_r + \Delta\sigma_r\,;\ \sigma_\theta' = \sigma_\theta + \Delta\sigma_\theta\,;\ \tau_r' = \tau_r + \Delta\tau_r\,;\ \tau_\theta' = \tau_\theta + \Delta\tau_\theta\,. \qquad (4)$$

Приращения в линейной постановке выражаются через частные производные:

$$\Delta\sigma_r = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r}dr\,;\ \Delta\tau_r = \frac{\partial \tau_r}{\partial \theta}d\theta\,,\ \Delta\sigma_\theta = \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta}d\theta\,;\ \Delta\tau_\theta = \frac{\partial \tau_\theta}{\partial r}dr\,. \qquad (5)$$

Умножая напряжения на площадь граней, получаем силы на гранях:

нормальные $F_{\sigma r}=\sigma_r r d\theta\, b$; $F_{\sigma r}'=\sigma_r'(r+dr)d\theta b$; $F_{\sigma\theta}=\sigma_\theta\, dr\, b$; $F_{\sigma\theta}'=\sigma_\theta' drb$;

касательные $F_{\tau\theta}=\tau_\theta r d\theta b$; $F_{\tau\theta}'=\tau_\theta'(r+dr)d\theta\, b$; $F_{\tau r}=\tau_\theta dr\, b$; $F_{\tau r}'=\tau_\theta'\, dr\, b$.

(6)

В центре элемента действует объёмная сила от сил веса или инерции:

$$F_o = m\, d^2s/dt^2, \qquad (7)$$

где масса элемента $m = \rho\, b\, dr\, d\theta\, (r + dr/2)$; ρ – плотность материала.

Составляющие силы по оси r и ξ :

$$F_{or}= F_o\cos(\theta+d\theta/2); \qquad F_{o\xi} = F_o\sin(\theta+d\theta/2). \qquad (8)$$

Условие равновесия элемента: проекции всех сил на выбранные оси координат r и ξ должны быть равны нулю.

Проекции на радиальную ось r:

$$\Sigma F_{ir} = 0 \text{ или } F_r' - F_r - (F_\theta + F_\theta')\sin\theta/2 + F_{\tau r}' - F_{\tau r} + F_{or} = 0. \qquad (9)$$

Развернув это выражение с помощью выражений (4)-(8) после вычитания, замены sin θ/2 ≈ θ/2 , деления на r dθ dr b и пренебрежения величинами второго порядка малости, получим:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau}{\partial \theta} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) + \rho g \cos\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right) = 0. \qquad (10)$$

Уравнение (10) совпадает с полученными в литературе [1] для кривых брусьев постоянной кривизны.

Проекции на касательную ось ξ :

$$\Sigma F_{i\theta} = 0 \text{ или } F_\theta' - F_\theta + F_{\tau\theta}' - F_{\tau\theta} + F_{o\theta} + F_{\tau r}' \sin\theta/2 + F_{o\xi} = 0. \qquad (11)$$

Развернув это выражение с помощью выражений (4)-(8) после вычитания, замены sinθ/2≈θ/2 , деления на r dθ dr b и пренебрежения величинами второго порядка малости, получим:

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + F_{\tau r}\sin\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right) = 0. \qquad (12)$$

Развернув уравнение суммы моментов относительно центра элемента, получим:

$$\Sigma M_o = 0 \text{ или } [\tfrac{1}{2}F_{\tau r}(r+\Delta r)d\theta + \tfrac{1}{2}F_{\tau r}'(r+\Delta r)d\theta]\cos\varphi/2+$$
$$+\tfrac{1}{2}[F_{\tau\theta}(\Delta r + \tfrac{1}{2}F_{\tau\theta}'\Delta r] = 0, \qquad (13)$$

откуда следует, что равенство будет выполняться при $\tau_\theta = \tau_r = \tau$.

Неудобство уравнений равновесия (10) и (12) заключается в использовании переменных r и θ, труднодоступных для измерений. Выразим их через более удобные координаты: расстоянию χ элемента от поверхности передней грани стойки и от места крепления l:

$$r = R + \chi\,; \qquad \partial r = \partial(R + \chi) = \partial\chi\,; \qquad Rd\theta = d\,l. \qquad (14)$$

Умножив и разделив уравнения на R и приняв во внимание соотношения (14), получим уравнения упругости через более удобные координаты χ и l:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial \chi} + \frac{R}{R+\chi}\frac{\partial \tau}{\partial l} + \frac{1}{R+\chi}(\sigma_r + \sigma_\theta) + f_r = 0; \qquad (15)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial \chi} + \frac{R}{R+\chi}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial l} + \frac{2\tau}{R+\chi} + f_\xi = 0, \qquad (16)$$

где f_r и f_ξ – компоненты удельной объёмной нагрузки на единицу массы:

$$f_r = \rho g \sin\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right), \qquad f_\xi = \rho g \sin\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right). \qquad (17)$$

Обращает на себя внимание тот факт, что для прямолинейного бруса, когда R → ∞, эти уравнения превращаются в классические уравнения теории упругости в декартовых координатах [2]. Тем самым выведенные уравнения с учётом кривизны бруса оказываются более общей моделью теории упругости; существующие уравнения теории упругости являются их частным случаем.

Полная математическая модель НДС кривого бруса на микроуровне помимо уравнений равновесия (15), (16) должна включать геометрические уравнения, физические уравнения, уравнение совместности и условия на поверхности.

Г*еометрические уравнения* в полярных координатах, выражающие относительные удлинения ε_r, ε_θ и сдвиг $\gamma_{\theta r}$ через компоненты перемещений s_r и s_ξ, получаются из уравнений Коши в декартовых координатах в виде:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial s_r}{\partial \chi}\ ;\ \varepsilon_\theta = \frac{\partial s_\xi}{\partial 1} + \frac{s_r}{R+\chi}\ ;\ \gamma_{\theta r} = \frac{\partial s_r}{\partial 1} + \frac{\partial s_\xi}{\partial \chi} - \frac{s_\xi}{R+\chi}\,. \qquad (18)$$

Физические уравнения (закон Гука) аналогичны таковым в декартовых координатах.

Уравнение совместности деформации в полярных координатах формулируется через гармонический оператор над напряжениями $\sigma_\theta + \sigma_r$ в точке, поскольку в теории упругости сумма напряжений в точке одинакова при любом наклоне площадки, т.е. $\sigma_x+\sigma_y= \sigma_\theta+\sigma_r$:

$$+\ {}^2\left(\sigma_\theta \quad \sigma_r\right) = 0. \qquad (19)$$

Декартовый гармонический оператор $= {}^2\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ выразится в полярных координатах через формулы дифференцирования сложного аргумента [1, с. 113]:

$$= {}^2\ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \quad \frac{\partial^2}{\partial \ell^2}\,. \qquad (20)$$

Бигармоническое уравнение совместности

$$\nabla^2\ \nabla^2\ \varphi = 0, \text{ или } \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial \ell^2}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial \ell^2}\right) = 0\,. \qquad (21)$$

Способ решения. Поскольку напряжения в точке не зависят от выбираемой системы координат, то НДС можно получать, как в классической теории упругости, через функцию напряжений Эри φ(x, z), но выразив её в полярных координатах [1, с. 112-113].

Не учитывая для простоты выкладок объёмные силы от веса стойки, заменяя r и θ новыми переменными χ, l по соотношениям (14), получим напряжения через функцию напряжений в новых координатах φ(χ, l):

$$\sigma_r = \frac{1}{R+\chi}\frac{\partial\varphi}{\partial\chi} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial l^2}\ ;\ \sigma_\xi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\chi^2}\ ;\ \tau = \frac{1}{(R+\chi)}\frac{\partial\varphi}{\partial l} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial\chi\partial l}\,. \qquad (22)$$

Тем самым задача о НДС пружинного зуба сводится к поиску функции φ(χ, l), удовлетворяющей граничным условиям. Некоторую информацию о её структуре дают наработки сопромата [3]. С точностью до постоянного множителя φ характеризует изгибающий момент М. С точностью до произвольных постоянных А и В он выражается через конфигурацию стойки по соотношениям (1):

$$M = Ax(l) + Bz(l). \qquad (23)$$

Распределение напряжений по толщине сечения имеет закон [3, с.219-221]:

$$\sigma(\chi) = C(1 - D/(R+\chi)). \qquad (24)$$

Тогда структура функции напряжений может приниматься в виде:

$$\varphi(\chi, l) = [Ax(l)+Bz(l)][C\chi^2 + D\chi\ln(R+\chi) + E\chi + G], \qquad (25)$$

где A, B, C, D, E, G – произвольные постоянные, подлежащие определению.

Произвольные постоянные находятся подстановкой аппроксимации (25) функции напряжений φ(χ, l) в уравнения (15), (16), (18), (21) с

учётом граничных условий и условий на поверхности пружинного зуба. После определения функции φ(χ, l) поля напряжений находятся по формулам (22).

Заключение. Таким образом, математическое моделирование НДС кривого пружинного зуба на микроуровне в полярных координатах приводит задачу к более общим уравнениям, чем классические уравнения теории упругости в декартовых координатах, и в то же время сохраняет возможности аналитического решения задачи через аппроксимацию функции напряжений степенными и логарифмическими функциями.

Библиографический список

1. Александров А.В., Потапов В.Д. Сопротивление материалов: Основы теории упругости и пластичности / А.В.Александров, В.Д.Потапов. – М.: Высшая школа, 2002. – 399с.
2. Жилкин В.А. Расчеты на прочность и жесткость элементов сельскохозяйственных машин: учеб. пособие; под ред. В.В.Бледных / В.А. Жилкин. – Челябинск: ЧНАУ, 2004. – 427 с.
3. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: в 8 т.: учеб. для втузов / В.И.Феодосьев. Т.2. – М.: Изд-во МГТУ, 1999. – 589 с.

Материал поступил в редакцию 26.02.08.

V.P. ZHAROV, V.I. IGNATENKO

THE MATHEMATICA L MODE L OF STRESS-DEFORMED STATE OF SPRING TOOTH CULTIVATION AT THE MICRO LEVE L IN POLAR COORDINATES

A withdrawa l of a mathematica l mode l of stress-strain state curved beam changing sections and curvature in polar coordinates, allowing the decision through power and logarithmic functions.

ЖАРОВ Виктор Павлович (р. 1937), заведующий кафедрой «Теоретическая механика», доктор технических наук (1980), профессор (1981), Заслуженный работник высшей школы (1996). Окончил РИСХМ (1963) по специальности «Конструирование и производство сельскохозяйственных машин».

Научные интересы связаны с исследованием гидравлических систем автоматического регулирования и управления мобильных машин и технологического оборудования.

Автор более 200 научных трудов, 9 авторских свидетельств и патентов РФ.

ИГНАТЕНКО Виталий Иванович (р.1984), ассистент кафедры «Теоретическая механика». Окончил ДГТУ (2006) по специальности «Управление и информатика технических систем».

Научные интересы связаны с исследованием динамики и прочности упругих систем сельскохозяйственных машин.

Имеет 6 научных статей.